

1 Увод

Тејлорова формула (Brook Taylor, 1685-1731) је веома значајна у математици. Овде се обрађује Тејлорова формула функције једне променљиве. Користи се највише у математичкој анализи и у нумеричкој анализи. Први је изказао енглески математичар Брук Тејлор 1715. године у свом делу “Дискретна и инверзна метода прираштаја” (“*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*”).

2 Тејлорова формула

2.1 Тејлорова формула за рационалне алгебарске функције

Нека је $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Нађимо сада све изводе овог полинома (до n -тог) па у функцију од њих изразимо коефицијенте.

Тако је:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \\ P'_n(x) &= na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}, \\ P''_n(x) &= n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \dots + 2a_{n-2}, \\ &\dots \\ P_n^{(n)}(x) &= n!a_0, \end{aligned}$$

односно:

$$\begin{aligned} P_n(0) &= a_n, \\ P'_n(0) &= a_{n-1}, \\ P''_n(0) &= 2a_{n-2}, \\ &\dots \\ P_n^{(n)}(0) &= n!a_0. \end{aligned}$$

Одатле имамо:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{x^n}{n!} P_n^{(n)}(0) + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} P_n^{(n-1)}(0) + \dots + \frac{x}{1!} P'_n(0) + \frac{x^0}{0!} P_n(0), \\ P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} P_n^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Лако се показује да важи:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(x-x_0)^n}{n!} P_n^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} P_n^{(n-1)}(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^0}{0!} P_n(0), \\ P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} P_n^{(k)}(x_0). \end{aligned}$$

а то је Тејлорова формула за полином n -тог степена.

2.2 Тејлорова формула за произвољну функцију

Теорема 1 Нека функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ има коначан n -ти извод у свакој тачки сегмента (интервала) $[a, b]$, и нека постоји њен $(n+1)$ -ви извод у свакој тачки интервала (a, b) . Тада за свако $x \in [a, b]$, и свако $p > 0$ постоји $\theta \in (0, 1)$, тако да је

$$f(b) = T_n(f, b, a) + R_n(f, b, a)$$

при чему је

$$T_n(f, b, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k$$

Тејлоров полином придружен (аташиран) функцији f , а

$$R_n(f, b, a) = \frac{(b-a)^{n+1} (1-\theta)^{n-p+1}}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(a + \theta(b-a)), \quad \text{за неко } \theta \in (0, 1)$$

тзв. остатак или грешка апроксимације.

Доказ:

Нека је x та произвољна тачка из интервала $[a, b]$. Функција

$$\phi(x) = f(b) - T_n(f, b, x)$$

је непрекидна на интервалу $[a, b]$,

$$\phi'(x) = \frac{-f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n, \quad x \in (a, b),$$

при чему је $\phi(b) = 0$ и $\phi(a) = R_n(f, b, a)$, где је $R_n(f, b, a)$ функција остатка тј,

$$R_n(f, b, a) = f(b) - T_n(f, b, a).$$

Формирајмо другу помоћну функцију и то облика

$$\gamma(x) = (b-x)^p, \quad x \in [a, b], \quad p > 0.$$

Функција γ је непрекидна на интервалу $[a, b]$, диференцијабилна на интервалу (a, b) ,

$$\gamma'(x) = -p(b-x)^{p-1} \neq 0, \quad x \in (a, b), \quad \gamma(b) = 0 \text{ и } \gamma(a) = (b-a)^p.$$

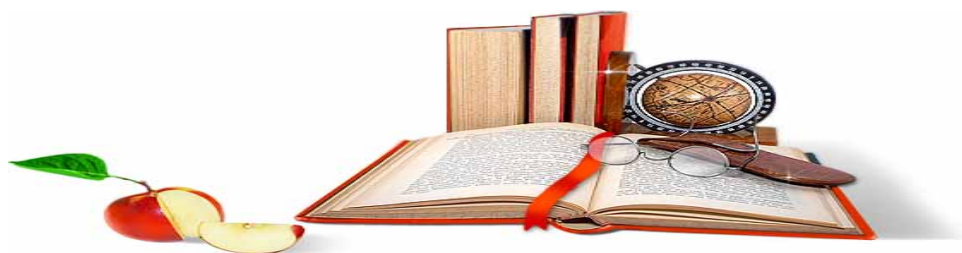
Функције ϕ и γ задовољавају услове Кошијеве теореме средње вредности:

1. непрекидне су на интервалу $[a, b]$,

**---- OSTATAK TEKSTA NIJE PRIKAZAN. CEO RAD MOŽETE
PREUZETI NA SAJTU WWW.MATURSKI.NET ----**

**BESPLATNI GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI TEKST
RAZMENA LINKOVA - RAZMENA RADOVA
RADOVI IZ SVIH OBLASTI, POWERPOINT PREZENTACIJE I DRUGI EDUKATIVNI MATERIJALI.**

**WWW.SEMINARSKIRAD.ORG
WWW.MAGISTARSKI.COM
WWW.MATURSKIRADOVI.NET**



NA NAŠIM SAJTOVIMA MOŽETE PRONAĆI SVE, BILO DA JE TO **SEMINARSKI**, **DIPLOMSKI** ILI **MATURSKI** RAD, POWERPOINT PREZENTACIJA I DRUGI EDUKATIVNI MATERIJAL. ZA RAZLIKU OD OSTALIH MI VAM PRUŽAMO DA POGLEDATE SVAKI RAD, NJEGOV SADRŽAJ I PRVE TRI STRANE TAKO DA MOŽETE TAČNO DA ODABERETE ONO ŠTO VAM U POTPUNOSTI ODGOVARA. U BAZI SE NALAZE **GOTOVI SEMINARSKI, DIPLOMSKI I MATURSKI RADOVI** KOJE MOŽETE SKINUTI I UZ NJIHOVU POMOĆ NAPRAVITI JEDINSTVEN I UNIKATAN RAD. AKO U **BAZI** NE NAĐETE RAD KOJI VAM JE POTREBAN, U SVAKOM MOMENTU MOŽETE NARUČITI DA VAM SE IZRADI NOVI, UNIKATAN SEMINARSKI ILI NEKI DRUGI RAD RAD NA LINKU **IZRADA RADOVA**. PITANJA I ODGOVORE MOŽETE DOBITI NA NAŠEM **FORUMU** ILI NA

maturskiradovi.net@gmail.com