1 Увод

Тејлорова формула (Brook Taylor, 1685-1731) је веома значајна у математици. Овде се обрађује Тејлорова формула функције једне промењљиве. Користи се највише у математичкој анализи и у нумеричкој анализи. Први је изказао енглески математичар Брук Тејлор 1715. године у свом делу "Дискретна и инверзна метода прираштаја" ("*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*").

2 Тејлорова формула

2.1 Тејлорова формула за рационалне алгебарске функције

Нека је $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. Нађимо сада све изводе овог полинома (до $n-тог$) па у функцију од њих изразимо коефицијенте.
Тако је:

$$
\begin{aligned}
P_n(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\\
P_n'(x)&=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+2a_{n-2}x+a_{n-1},\\
P_n''(x)&=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\ldots+2a_{n-2},\\
&\ldots\\
P_n^{(n)}(x)&=n!a_0,
\end{aligned}
$$

односно:

$$
\begin{aligned}
P_n(0)&=a_n,\\
P_n'(0)&=a_{n-1},\\
P_n''(0)&=2a_{n-2},\\
&\ldots\\
P_n^{(n)}(0)&=n!a_0.
\end{aligned}
$$

Одатле имамо:

$$
\begin{aligned}
P_n(x)&=\frac{x^n}{n!}P_n^{(n)}(0)+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}P_n^{(n-1)}(0)+\ldots+\frac{x}{1!}P_n'(0)+\frac{x^0}{0!}P_n(0),\\
P_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}P_n^{(k)}(0).
\end{aligned}
$$

Лако се показује да важи:

$$
\begin{aligned}
P_n(x)&=\frac{(x-x_0)^n}{n!}P_n^{(n)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}P_n^{(n-1)}(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^0}{0!}P_n(0),\\
P_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}P_n^{(k)}(x_0).
\end{aligned}
$$

а то је Тејлорова формула за полином $n-тог$ степена.

2.2 Тејлорова формула за произвољну функцију

Теорема 1 *Нека функција* $f:[a,\ b]\to \mathbb{R}$ *има коначан* n*-ти извод у свакој тачки сегмента (интервала)* $[a,b]$*, и нека постоји њен* $(n+1)-$*ви извод у свакој тачки интервала* (a,b)*. Тада за свако* $x\in[a,b]$*, и свако* $p>0$ *постоји* $\theta\in(0,1)$*, тако да је*

$$f(b)=T_n(f,b,a)+R_n(f,b,a)$$

при чему је

$$T_n(f,b,a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$$

Тејлоров полином придружен (аташиран) функцији f*, а*

$$R_n(f,b,a)=\frac{(b-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{p\cdot n!}f^{(n+1)}\big(a+\theta(b-a)\big),\quad \text{за неко } \theta\in(0,1)$$

тзв. остатак или грешка апроксимације.

Доказ:

Нека је x та произвољна тачка из интервала $[a,b]$. Функција

$$\phi(x)=f(b)-T_n(f,b,x)$$

је непрекидна на интервалу $[a,b]$,

$$\phi'(x)=\frac{-f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n,\quad x\in(a,b),$$

при чему је $\phi(b)=0$ и $\phi(a)=R_n(f,b,a)$, где је $R_n(f,b,a)$ функција остатка тј,

$$R_n(f,b,a)=f(b)-T_n(f,b,a).$$

Формирајмо другу помоћну функцију и то облика

$$\gamma(x)=(b-x)^p,\quad x\in[a,b],\quad p>0.$$

Функција γ је непрекидна на интервалу $[a,b]$, диференцијабилна на интервалу (a,b),

$$\gamma'(x)=-p(b-x)^{p-1}\neq 0,\quad x\in(a,b),\quad \gamma(b)=0 \text{ и } \gamma(a)=(b-a)^p.$$

Функције ϕ и γ задовољавају услове Кошијеве теореме средње вредности:

1. непрекидне су на интервалу $[a,b]$,